Technische Universität
Fachbereich Mathematik
23. Januar 2024

Dr. Michele Serra
Sebastian Scheel, M.Sc.
Wintersemester 2023/24

Probeklausur zur Linearen Algebra I für Lehramt

Nachname: **Vorname:**

Matrikelnummer:

Platznummer: 1

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
erreichte Punktzahl							
Maximalpunktzahl	20	20	20	20	20	20	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **6 Aufgaben**.
2. Von den 6 Aufgaben werden nur die **besten 5 gewertet**.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
5. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
6. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
7. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem Arbeitspapier steht.)
8. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
9. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.

Name: **Seite 1 zu Aufgabe 1**
Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 1 (20 Punkte).

(a) (3 Punkte) Formulieren Sie die Definitionen der Begriffe *reflexiv*, *symmetrisch* sowie *transitiv* für eine Relation auf einer Menge.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass jede symmetrische, antisymmetrische, total vergleichbare Relation bereits auch reflexiv ist.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Auf der Menge

$$\mathscr{G} \;:=\; \left\{\, L \;\middle|\; L \text{ ist eine Gerade des } \mathbb{R}^n \,\right\}$$

der Geraden im $\mathbb{R}^n$ definieren wir die Relation $\sim$ durch

$$L \sim L' \quad :\Longleftrightarrow \quad L \text{ und } L' \text{ haben kollineare Richtungsvektoren}$$

für alle $L, L' \in \mathscr{G}$.

(i) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{G}$ ist.

(ii) (4 Punkte) Entscheiden Sie, ob $\sim$ in den Fällen $n = 1$ und $n \geq 2$ jeweils antisymmetrisch und/oder total vergleichbar ist.

(iii) (3 Punkte) Es sei $L = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} \in \mathscr{G}$. Zeigen Sie, dass für die Äquivalenzklasse $[L]$ von L gilt:

$$[L] \;=\; \left\{\, \{\mathbf{u} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} \;\middle|\; \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \,\right\}$$

(iv) (2 Punkte) Bestimmen Sie ein Vertretersystem der Äquivalenzrelation $\sim$.

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

Name:
Seite 3 zu Aufgabe 1
Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Name: **Seite 1 zu Aufgabe 2**
Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 2 (20 Punkte).

(a) (4 Punkte) Formulieren Sie den *euklidischen Algorithmus* sowie die Definition des *größten gemeinsamen Teilers* zweier ganzer Zahlen.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 144 und -60.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ gilt:

$$ac \mid bc \qquad \Longrightarrow \qquad a \mid b$$

(d) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine ganze Zahl $f_n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad f_{n+1} \;=\; f_n + f_{n-1} \;\text{ für }\; n \geq 1$$

(i) (2 Punkte) Berechnen Sie die Zahlen $f_2, ..., f_{13}$.

(ii) (4 Punkte) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion und dem euklidischen Algorithmus, dass f_n und f_{n+1} für alle $n \in \mathbb{N}_0$ stets teilerfremd sind.

(iii) (4 Punkte) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zwei ganze Zahlen $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ mit $x_n f_{n+1} + y_n f_n = 1$.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

Name:
Seite 3 zu Aufgabe 2
Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Name: **Seite 1 zu Aufgabe 3**
Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 3 (20 Punkte).

(a) (4 Punkte) Formlieren Sie die Definitionen der Begriffe *linear unabhängig*, *linear abhängig*, *Erzeugendensystem* sowie *Basis* für ein Vektorsystem.

(b) (5 Punkte) Es sei ein linear abhängiges Vektorsystem $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ eines K-Vektorraumes V so gegeben, dass $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, ..., \mathbf{v}_n$ für jedes $i = 1, ..., n$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass es eine lineare Relation

$$c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

gibt, in der alle Skalare $c_1, ..., c_n \in K$ ungleich Null sind.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie einen Vektor, der das folgende Vektorsystem zu einer Basis des Vektorraumes $\mathbb{Q}^4$ ergänzt:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ der Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ 6x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 10x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

(i) (5 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von U.

(ii) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $\mathbb{R}^3/U$.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

Name:
Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3