Analysis I

Aufgabensammlung der Lernfahrt WiSe 23/24

Inhaltsverzeichnis

Herzlich Willkommen auf der Lernfahrt im WiSe 24/25. Da du hier mitfährst, hast du dein Mathestudium folglich noch nicht aufgegeben und alleine das ist schon einiges wert!

Auf den folgenden Seiten findest du Aufgaben, welche die ersten Themen der Analysis I Vorlesung abdecken. Falls Fragen aufkommen, so empfiehlt es sich erst ein paar zu sammeln, da diese sich ab und an auch selbst erklären. Ansonsten stehen dir viele freundliche Tutoren als Ansprechpartner zur Verfügung.

Es ist nicht erforderlich alle Aufgaben an diesem einen Wochenende zu berechnen. Lieber solltest du dich mit deinen Schwierigkeiten auseinander setzen und alle Themen einmal durchgegangen sein.

WICHTIG: Es ist gut möglich, das bereits weitere Themen in der Vorlesung behandelt wurden oder auch in der Klausur vorkommen können. Ebenso geben die Aufgaben keine Garantie, dass die Klausuraufgaben ähnlich werden. Diese Sammlung ist nur zu Übungszwecken.

Und nun viel Spass beim Lösen :)

1 Mengen

Erstelle vor dem Bearbeiten der Aufgaben eine Mindmap mit folgenden Begriffen:

Infimum, Minimum, Supremum, Maximum, Beschränktheit

1.1 Aufgabe

Beweisen Sie folgende Aussagen für beliebige Mengen A,B,C mit Hilfe von Wahrheitstafeln UND Aussagenlogik:

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(c) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

1.2 Aufgabe

Es seien A, B, C Mengen. Allgemein gilt für Mengen A, B:

$$A \subset B \iff \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Zeigen Sie unter Verwendung von Quantoren:

$$A \subset B \Rightarrow C \backslash B = (C \backslash A) \backslash B.$$

1.3 Aufgabe

Bestimmen Sie $\sup M$ und $\inf M$, falls diese existieren.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | \; e^x \leq 2\}$

(b) $M = \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} | \; n \in \mathbb{N} \right\}$

1.4 Aufgabe

Bestimmen Sie jeweils, ob die angegebenen Mengen nach oben und/oder unten beschränkt sind. Geben Sie in den entsprechenden Fällen jeweils Supremum bzw. Infimum an. Handelt es sich hierbei auch um Maxima bzw. Minima?

(a) $A := \{r \in \mathbb{Q} | \; r < 2\}$

(b) $B := \{r \in \mathbb{Q} | \; r^2 < 4\}$

(c) $C := \{p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

(d) $D := \{(-1)^n \cdot n | \; n \in \mathbb{N}\}$

(e) $E := \{x \in \mathbb{R} | \; x^2 = -2x\}$

1.5 Aufgabe

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^+$ eine Menge mit $\sup A = a \in \mathbb{R}^+$.
Definiere $A^* := \{\frac{1}{x} | x \in A\}$.
Zeige $\inf A^* = \frac{1}{a}$.

1.6 Aufgabe

Sind die folgenden Aussagen für reelle, beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wahr oder falsch? Beweisen oder widerlegen Sie dies:

a $\liminf(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$

b $\limsup(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \liminf b_n$

c $\limsup a_n^2 \leq (\limsup a_n)^2$

2 Induktion

Es empfiehlt sich vor dem Bearbeiten, sich folgende Begriffe noch einmal klar zu machen:

Induktionsanfang, Induktionsvorraussetzung, Induktionsschluss, $\mathbb{N}$

2.1 Aufgabe

Zeige:

$$\binom{2n}{n} \geq 2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Aufgabe

Es seien $x_1, \cdots, x_n \in (0,1)$. Zeige:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

2.3 Aufgabe

Zeige:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Aufgabe

Zeige:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

3 Komplexe Zahlen

3.1 Aufgabe

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $(5 + 2i)(4 - 3i)$

ii) i^{-1}

iii) $(1 + 4i)^{-1}$

iv) $\dfrac{1 + 5i}{5 - i}$

v) $(1 + i)^{16}$

vi $\sqrt{i}$

3.2 Aufgabe

Zeichnen Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene:

a) $A := \{z \in \mathbb{C} : \|z - 2\| \leq 1\}$

b) $B := \{z \in \mathbb{C} : \|z - i\| = \|z + i\|\}$

c) $C := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z - 2)^2) \leq 2\}$

4 Abbildungen

Erstelle vor dem Bearbeiten der Aufgaben eine Mindmap mit folgenden Begriffen:

injektiv, surjektiv, bijektiv, Abbildung bzw. Funktion, Urbild, Umkehrabbildung

4.1 Aufgabe

Seien M, N nichtleere Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie: Für alle $Y \subseteq N$ gilt $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Ist f surjektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.

ii) Ist f injektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.

iii) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist f surjektiv.

iv) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist f injektiv.

b) Zeigen Sie: Für alle $X \subseteq M$ gilt $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Ist f surjektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.

ii) Ist f injektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.

iii) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist f surjektiv.

iv) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist f injektiv.

4.2 Aufgabe

Überprüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ , x \mapsto x + 1$

b) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\ , x \mapsto x^2$

c) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ , x \mapsto \pi \cdot x$

d) $i : \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}\ , x \mapsto x^2$

5 Topologische Grundlagen

5.1 Aufgabe

Sind die Folgenden Mengen offen und/ oder abgeschlossen?

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 < 0\}$

b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\ n \in \mathbb{N}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z}| \geq 4\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N} : 3k = x\}$

5.2 Aufgabe

Sei $X, Y \subset \mathbb{R}$. Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

1. X offen $\Rightarrow$ X nicht abgeschlossen.
2. X kompakt und Y abgeschlossen $\Rightarrow$ $Y \cup X$ abgeschlossen.
3. $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mit A_n mit A_n offen für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow X$ ist offen.
4. X, Y weder offen noch abgeschlossen $\Rightarrow$ $X \cup Y$ kann entweder offen abgeschlossen oder keins von beiden sein.
5. X kompakt und Intervall $\Leftrightarrow \sup X = \max X, \inf X = \min X$ und X Intervall.

6 Folgen

Erstelle vor dem Bearbeiten der Aufgaben eine Mindmap mit folgenden Begriffen:

Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz, Divergenz, Cauchy-Folgen, rekursive Folgen, Grenzwerte, Häufungspunkte

6.1 Aufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch:

$$a_0 = a,\ a_1 = b,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

(a) Stelle $a_{k+1} - a_k$ mit Hilfe von $b - a$ dar und beweise ihre Gültigkeit.

(b) Stelle (a_n) implizit mit Hilfe der Teleskopsumme dar.

(c) Bestimme den Grenzwert von (a_n).

6.2 Aufgabe

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$. Zeige $\lim a_n = a$ und $\lim a_n = b \Rightarrow a = b$.

6.3 Aufgabe

Entscheide, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe kurz.

a) Ist $\underline{\lim}\, a_n < \overline{\lim}\, a_n$ so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge.

b) Hat a_n zwei Häufungspunkte so ist a_n konvergent.

c) Ist $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton.

d) Seien a_n, b_n beschränkte Folgen, dann gilt: $\underline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$.

6.4 Aufgabe

a) Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$.

b) Es sei (a_n) eine Folge, so dass $\frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ konvergiert. Beweisen oder widerlegen Sie, dass (a_n) konvergiert.

6.5 Aufgabe

Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder unten für $n \in \mathbb{N}$ angegeben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen.

a) $a_n = \dfrac{1 + 6n + 2n^2}{(n + 3)n}$

b) $b_n = 6 - \dfrac{6+n^2}{n}$

c) $c_n = \dfrac{(-2)^{-n}+1}{1+2n} - 1 + \dfrac{2n}{1+2n}$

d) $d_n = \dfrac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n}$

6.6 Aufgabe

Geben Sie für die nachfolgenden Folgen die Häufungspunkte bzw. Grenzwert an, falls existent.

(a) $a_k = \begin{cases} k & ,k \text{ gerade} \\ 0 & ,k \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & ,k \text{ gerade} \\ 0 & ,k \text{ ungerade} \end{cases}$

(c) $a_k = \begin{cases} 1+\frac{1}{k} & ,k \text{ gerade} \\ -1+\frac{1}{k} & ,k \text{ ungerade} \end{cases}$

7 Reihen

Erstelle vor dem Bearbeiten der Aufgaben eine Mindmap mit folgenden Begriffen:

Konvergenzkriterien, absolute Konvergenz, geometrische Reihe, Exponentialreihe

Untersuchen Sie folgende Reihen auf (absolute) Konvergenz, bzw. Divergenz. Geben Sie die genauen Grenzwerte bei den Aufgaben an.

7.1 Aufgabe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

7.2 Aufgabe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{k}}$$

7.3 Aufgabe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k-1}}{k^2+1}$$

7.4 Aufgabe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

7.5 Aufgabe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k!}$$

7.6 Aufgabe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{k-2}{k+2}$$

7.7 Aufgabe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{a}-1)^k \ , \ a > 0$$

7.8 Aufgabe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2+1}$$

7.9 Aufgabe

$$\sum_{k=2}^{\infty} a^{k+1}\frac{1}{k!}\ ,\ a > 0$$

7.10 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[k]{s}\cdot(e^x-1)}{e^x}\right)^k$$

Bestimme den Konvergenzradius und untersuche den Konvergenzbereich (der Konvergenzradius sagt nur aus, dass alle Punkte innerhalb konvergieren und alle ausserhalb divergieren, aber es ist keine Aussage über Grenzstellen möglich).

7.11 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$$

7.12 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (k+2) x^k$$

7.13 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k)!}x^k$$

7.14 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{k}\right)^k x^k$$

7.15 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9^k\cdot x^{2k}}{2}$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

7.16 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}$$

7.17 Aufgabe

$$a_k \leq b_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent .}$$

7.18 Aufgabe

$$0 \leq a_k \leq b_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent } .$$

7.19 Aufgabe

Es seien a_k, b_k unbeschränkte Folgen mit $b_0 = 0$. Gilt dann

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : |a_{k+1} - b_k| \leq \frac{1}{2}|a_k - b_{k-1}| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_{k-1}) \text{ konvergiert}$$

7.20 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \text{ konvergiert} \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)^2 \text{ konvergiert}$$

7.21 Aufgabe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \text{ konvergiert}$$

8 Stetigkeit

Erstelle vor dem Bearbeiten der Aufgaben eine Mindmap mit folgenden Begriffen:

$\varepsilon - \delta-$Kriterium, punktweise-, gleichmässige-, Grenzwerte, Zwischenwertsatz, Polarkoordinaten

Überprüfe die folgenden Funktionen mit dem $\varepsilon - \delta$ - Verfahren auf punktweise und gleichmässige Stetigkeit im jeweiligen Definitionsbereich $\mathbb{D}$

8.1 Aufgabe

$$f(x) = \frac{2x+3}{5}\ ,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

8.2 Aufgabe

$$f(x) = \sqrt{x+1}\ ,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

8.3 Aufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\ ,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

8.4 Aufgabe

Schwierig

$$f(x) = \frac{1}{x}\ ,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>0}$$

8.5 Aufgabe

$$f(x) = (x-2)^2\ ,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit. Sie dürfen hierbei jegliche Sätze zur Stetigkeit aus der Vorlesung benutzen.

8.6 Aufgabe

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \sin(\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

8.7 Aufgabe

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^8-1}{x+1} & \text{für } x > -1 \\ (2x)^3 & \text{für } x \leq -1 \end{cases}$$

8.8 Aufgabe

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{2}) & \text{für } x \geq \pi \\ \sin(\frac{1}{x-\pi}) & \text{für } x < \pi \end{cases}$$

8.9 Aufgabe

Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist $\forall x \in \mathbb{R}$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 17 & \text{für } x \leq 3 \\ \frac{1}{2x-t} & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} & \text{für } x < -1 \\ 2x^2 - 4tx + 2t^2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

8.10 Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen für eine Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

a) f stetig in 0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0 \Rightarrow$ f stetig in 0

c) f monoton und beschränkt $\Rightarrow$ f stetig

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert $\Rightarrow$ f stetig in 0

8.11 Aufgabe

Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Sind folgende Bedingungen notwendig und/oder hinreichend für die Stetigkeit von f in 0?

a) $\exists \gamma > 0\ \exists C > 0\ \forall x \in [-1, 1] : \ |f(x)| \leq C|x|^\gamma$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = 0$

c) Die Funktion $|f|$ ist stetig in 0.

8.12 Aufgabe

Zeige, dass die beiden stetigen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Schnittstelle haben. Zeige, dass diese Schnittstelle eindeutig ist.

9 Differenzierbarkeit

Erstelle vor dem Bearbeiten der Aufgaben eine Mindmap mit folgenden Begriffen:
Es empfiehlt sich vor dem Bearbeiten, sich folgende Begriffe noch einmal klar zu machen:

Differentenquotient, Mittelwertsatz, Zwischenwertsatz, Stetigkeit

9.1 Aufgabe

Zeige, dass $f(x) := x^n$ differenzierbar $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ist und bestimme die Ableitung.

9.2 Aufgabe

Berechne die folgenden Ableitungen:

a) $f : (0, \infty)\ ,\ f(x) = (\frac{1}{x})^x$

b) $g(x) = cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

9.3 Aufgabe

Zeige für, dass f differenzierbar ist und bestimme f'.

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

9.4 Aufgabe

Sei f eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

a) Berechne $f'(x)\ \forall\ x \neq 0$.

b) Zeige, dass f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ ist.

9.5 Aufgabe

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton wachsend. Zeige:

(a) $\forall\ x \in (a, b)$ gilt: $f'(x) \geq 0$.

(b) Es gibt eine streng monoton wachsende, differenzierbare Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ so, dass $f'(x_0) = 0$ für ein $x \in (-1, 1)$.

(c) Ist $f'(x_0) = 0$, so gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $\xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ mit $f'(\xi) \neq 0$.

9.6 Aufgabe

Es sei $\varepsilon > 0$ und f, g differenzierbar. Welche Aussagen sind wahr?

1 $f'(0) > 0$, f' stetig $\Rightarrow$ existiert ε-Umgebung um 0 in der f streng monoton wächst.

2 f in jeder ε-Umgebung streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $f'(0) > 0$

3 f streng monoton wachsend und g monoton fallend $\Rightarrow$ $f \cdot g$ hat überall eine negative Ableitung.

4 f und g haben in $x = 0$ lokales Minimum mit $f(0), g(0) > 0 \Rightarrow f \cdot g$ hat lokales Minimum in $x = 0$.

9.7 Aufgabe

a) Es sei $f : [0, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \tan 2x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{4})$. Zeige: $f(x) \geq 2x$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{4})$

b) Zeige, das für $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt: $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$.

9.8 Aufgabe

Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) := 1 - 2e^{-\sin x}$. Begründe, dass f mindestens eine Nullstelle hat.

10 Rechenaufgaben

Nachdem ihr nun viele Aufgaben gelöst habt, erhaltet ihr nun die Möglichkeit, mit Hilfe der folgenden Aufgaben, eure mathematischen Fähigkeiten noch weiter zu verbessern!

10.1 Supremum, Infimum

10.1.1

Bestimme jeweils das Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen, falls diese existieren:

1. $M = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 10\right\}$
2. $M = \left\{1 + \frac{2}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $M = \left\{1 + \frac{1}{n} - 2^{-m} \middle| n, m \in \mathbb{N}\right\}$
4. $M = \left\{1 + \frac{4}{3^n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \cup [2, 3]$
5. $M := \{x^2 | \, x \in [3, \infty)\}$,
6. $M := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$,
7. $M := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [2n, 2n + 1]$.

10.2 Folgen

10.2.1

Untersuche auf Konvergenz und begründe:

- $\sin(\cos(\frac{n!}{n^n}) \cdot \pi)$
- $\sqrt{e^{\sqrt{5}^n - 1}}$
- $(-1)^{n+3} \cdot \cos(n\pi)$

10.3 Reihen

10.3.1

Untersuche die Reihen auf Konvergenz und bestimme gegebenfalls den Grenzwert:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+200}{2n+7}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3-4n^2+4}{2n^5-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{\cos(2n\pi)}{2}\right)^n}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n+n\cdot\sin n}$ h) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+(-1)^n}$ i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$, $a\in\mathbb{R}^+$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+(-1)^n\cdot n}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

10.4 Stetigkeit

10.4.1

Sei $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\begin{cases}1 & , x<\sqrt{5}\\ 0 & , x\geq\sqrt{5}\end{cases}$. Ist f stetig?

10.4.2

Gegeben sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\begin{cases}1+x & , x\leq 0\\ x & , 0<x<1\\ 2-x & , 1\leq x\leq 2\\ 2x-x^2 & , x>2\end{cases}$.

Wo ist f stetig?

10.4.3

In welchen Punkten sind die Funktionen stetig?

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\begin{cases}x & , x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ a & , x\in\mathbb{Q} \text{ mit } a\in\mathbb{R}\end{cases}$
2. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g(x):=\max\{n\in\mathbb{N}\mid n\leq x\}$
3. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $h(x):=\begin{cases}0 & , x\in[0,1]\\ x^2 & , \text{sonst}\end{cases}$