Aufgaben zur Linearen Algebra
und analytischen Geometrie für Lehramt I
Wintersemester 23/24

Es werden folgende Themen behandelt:

1. Mengen und Zahlen
   - Mengen und Abbildungen
   - Größter gemeinsamer Teiler
   - Algebraische Strukturen
   - Restklassen und Äquivalenzrelationen
   - Komplexe Zahlen und Polynomdivision
2. Grundkonzepte der Linearen Algebra
   - Vektorräume und Untervektorräume
   - Basis und Dimension
   - Matrizen und lineare Abbildungen des K^n
   - Dimensionstheorie und reguläre Matrizen

Beachte, dass du nicht alle Aufgaben an einem Wochenende lösen kannst. Daher solltest du dir aus jedem Kapitel einige Aufgaben ansehen und nicht von vorne nach hinten durchrechnen.
Die Aufgaben sind nicht nach Schwierigkeitsgrad sortiert!

Die Aufgaben dienen zur Wiederholung des Vorlesungsstoffes von Oktober bis Januar. Zur optimalen Vorbereitung auf die Klausur sind alle Vorlesungsinhalte zu berücksichtigen. Die Aufgaben haben also keinen Anspruch darauf alle Vorlesungsinhalte abzudecken.

Viel Spaß mit den Aufgaben und viel Erfolg in der Klausur.

1 Mengen und Zahlen

1.1 Mengen und Abbildungen

1.1.1

Gebe eine mathematisch formalisierte Darstellung folgender Mengen an:

a) Die Menge aller Kubikzahlen in $\mathbb{Z}$, die durch 5 oder 7 teilbar sind.

b) Die Schnittmenge der Mengen A und B, wobei A die Menge der Punkte in der x-y-Ebene ist, deren erste Koordinate Quadrat in $\mathbb{Z}$ ist und B die Gerade $y = 2x$

1.1.2

Es seien A, B und C drei Mengen. Zeigen Sie:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.1.3

Ergänze folgende Definitionen:

1. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist injektiv genau dann, wenn....
2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist surjektiv genau dann, wenn....
3. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist bijektiv genau dann, wenn...

1.1.4

Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) := x^2 + 1$

b) $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ $\quad f(x,y) := x + y - xy$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) := \sin(x)$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) := x + 5$

e) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ $\quad f(z) := \frac{1}{4} \cdot (1 + (-1)^z \cdot (2z - 1))$

1.1.5

Beweise oder widerlege für Abbildungen $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$:

a) f ist injektiv, wenn $g \circ f$ injektiv ist.

b) g ist surjektiv, wenn $g \circ f$ surjektiv ist.

c) f und g sind genau dann beide injektiv, wenn $g \circ f$ injektiv ist.

d) f und g sind genau dann beide surjektiv, wenn $g \circ f$ surjektiv.

1.1.6

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Bestimme die folgenden Mengen:

a) $f^{-1}([1,4])$

b) $f([-1,3])$

c) $f(f^{-1}(M))$ für $M = (-\infty, 0]$

d) $f^{-1}(f(M))$ für $M = (-\infty, 0]$

1.1.7

Betrachte $f : [-3,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^4 - 2$
Bestimme das Bild von f.

1.2 Größter gemeinsamer Teiler

1.2.1

Was besagt das Lemma von Bezout?

1.2.2

Bestimme den ggT der nachfolgenden Zahlenpaare:

a) $462, 910$

b) $24087, 33411$

c) $30, 24$

d) $110, 99$

Bestimme außerdem $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass gilt: $a \cdot x + b \cdot y = ggT(a,b)$.
(Natürlich nur dort, wo dir die Rechnung nicht zu lang erscheint.)

1.2.3

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeige:
Es existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot b = 1$ genau dann, wenn es kein $c \in \mathbb{N}, c > 1$ gibt, welches a und b teilt.

1.2.4

Berechne das multiplikative Inverse:

a) zu 13 in $\mathbb{Z}_{101}$

b) zu 6 in $\mathbb{Z}_{71}$

c) Warum existieren diese Inversen?

1.3 Induktion

1.3.1 Aufgabe

Beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: 6 teilt $n^3 - n$.

1.3.2 Aufgabe

Zeigen Sie unter Verwendung der Beweismethode *vollständige Induktion*, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) $2^n \leq (n+1)!$

(b) $\underbrace{(1+3+5+7+...)}_{n} = n^2$

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

1.4 Algebraische Strukturen

1.4.1

Wann nennt man eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$ eine Gruppe?
Wann nennt man eine Teilmenge $U \subseteq G$ zusammen mit der Verknüpfung $*$ eine Untergruppe $(U, *)$ von G?

1.4.2

Es sei $\mathbf{G} := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, zeige, dass

$$(a, b) \circ (c, d) := (ac, ad + b)$$

eine Abbildung $\circ : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definiert und dass $(\mathbf{G}, \circ)$ eine Gruppe ist.

1.4.3

Zeige, dass $\mathbf{G} := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der durch

$$a \times b := a + b + ab$$

definierten Operation eine Gruppe ist. Löse in $\mathbf{G}$ die Gleichung

$$5 \times y \times 6 = 17$$

1.4.4

Sei $G = \{e, x, y, a, b, c\}$. Von der Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Elmenet e ist die unten stehende unvollständige Gruppentafel bekannt. Weiter ist bekannt, dass $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, c\}$, $\{e, x, y\}$ Untergruppen von G sind. Vervollständigen Sie die Gruppentafel von $(G, \circ)$:

$\circ$	e	x	y	a	b	c
e						
x				b		
y						
a		c			y	
b						
c						

1.4.5

a) Berechne die folgenden Produkte in S_6:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Löse mit σ, τ wie in a) die Gleichung $\sigma \circ x = \tau$.

c) Berechne die Inversen von x, σ, τ.

d) Gib σ, τ und x, sowie ihre Inversen in der Zykelschreibweise an.
(Natürlich kannst du die Aufgabenteile a) - c) auch schon in Zykelschreibweise berechnen.)

1.4.6

Gegeben sei die Gruppe $S_3 = \{e, d, d^2, s_1, s_2, s_3\}$ mit
$e = (1),\ d = (123),\ d^2 = (132)\ s_1 = (23),\ s_2 = (13),\ s_3 = (12)$.

a) Zeige, dass die sogenannte alternierende Gruppe $A_3 = e, d, d^2$ eine Untergruppe der S_3 ist.

1.4.7

Seien R_1 und R_2 Ringe. Zeige, dass $R_1 \times R_2$ mit den Verknüpfungen

$$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) := (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$$
$$(r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) := (r_1 s_1, r_2 s_2)$$

ein Ring ist. Seien R_1 und R_2 nun zusätzlich Körper. Ist $R_1 \times R_2$ kommutativ? Besitzt $R_1 \times R_2$ ein Einselement? Gibt es invertierbare Elemente $(R_1 \times R_2)^*$? Um welche algebraische Struktur handelt es sich bei $R_1 \times R_2$?

1.4.8

Es seien $R := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ und $K := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Zeige:

a) R ist mit diesen Einschränkungen und den Verknüpfungen von $\mathbb{R}$ ein Ring.

b) K ist mit diesen Einschränkungen und den Verknüpfungen von $\mathbb{R}$ ein Körper.

1.5 Restklassen und Äquivalenzrelationen

1.5.1

Untersuche, ob durch folgende Relationen Äquivalenzrelationen definiert sind und gebe gegebenfalls ein Vertretersystem an:

a) Für $x, y \in \mathbb{Q}$ gelte: $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \cdot y \geq 0$.

b) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte: $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x^2 = y$.

c) Für $x, y \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gelte: $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x + y = x \cdot y$.

1.5.2

Es sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.
Überprüfe, ob untenstehende Relationen auf M Äquivalenzrelationen sind und gebe gegebenenfalls eine geometrische Beschreibung der Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem an.

a) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

b) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 + y_2 = x_2 + y_1$

1.5.3

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x_1 + \overline{2}x_2 + x_3 + \overline{4}x_4 + x_5 &= \overline{3} \\ x_2 + \overline{4}x_3 + \overline{3}x_4 &= \overline{1} \\ \overline{2}x_1 + \overline{4}x_2 + \overline{3}x_3 + x_4 + \overline{2}x_5 &= \overline{0} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \overline{2}x_4 + x_5 &= \overline{2} \\ \overline{2}x_1 + \overline{4}x_2 + \overline{4}x_3 + \overline{2}x_5 &= \overline{0} \end{aligned}$$

Bezeichnung: Es gilt $\overline{x} = [x]_5$ für alle $x \in Z/5\mathbb{Z}$.

1.6 Komplexe Zahlen

1.6.1

Seien $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $M = \{z, z^2, 1\} \subset \mathbb{C}$.
Zeige, dass $(M, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei $\cdot$ die Multiplikation in $\mathbb{C}$ bedeutet.

1.6.2

Schreibe in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $\sqrt{i}$

b) $\frac{1+3i}{3-i}$

c) $(i + \sqrt{i})^3$

1.6.3

a) Bestimme den Real- und den Imaginärteil von $\frac{3+i}{8-i}$

b) Es sei $\frac{1}{z} = 1 + i$. Berechne $Re(z), Im(z), z^2$ und die Polarkoordinatendarstellung von z.

1.6.4

Skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Ebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \frac{2}{z-i} = \overline{z} + i\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - (2 + 2i)| \leq 2\}$

1.6.5

Gebe die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten an.

a) $z_1 \; = \; -1 + \sqrt{-3}$

b) $z_2 \; = \; -1 + i$

c) $z_3 \; = \; -3$

d) $z_4 \; = \; \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{-3}}{6}$

1.6.6

Gebe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ an.

a) $5 \cdot (\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) i)$

b) $8 \cdot (\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i)$

c) $2 \cdot (-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i)$

1.6.7

Wir betrachten die Menge $U_8 := \{z \in \mathbb{C} | z^8 = 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Die Elemente von U_8 heißen $8-$te Einheitswurzeln.

a) Skizzieren Sie die Menge U_8 in der komplexen Zahlenebene

b) Zeigen Sie, dass U_8 eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen ist.

c) Zeigen Sie durch Angabe eines geeigneten Isomorphismus, dass U_8 und $\mathbb{Z}_8$ isomorph sind.

2 Grundkonzepte der linearen Algebra

2.1 Vektorräume und Untervektorräume

Im Folgenden werden Spaltenvektoren, wie $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ aus Platzgründen vereinfacht als Zeilenvektoren der Form (x_1, x_2) geschrieben. Sie sind aber dennoch als Spaltenvektoren zu verstehen.

2.1.1

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Untervektorräume? Skizziere die Mengen jeweils.

a) $U_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2 \wedge x_1 = 1\}$

b) $U_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq |x_2|\}$

c) $U_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}$

d) $U_4 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\}$

2.1.2

Ist folgende Teilmene des $\mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum?

$$U := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\right\}$$

2.1.3

Wir betrachten den $\mathbb{Z}_5$-Vektorraum $\mathbb{Z}_5^3 = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

a) Wieviele verschiedene Vektoren enthält $\mathbb{Z}_5^3$?

b) Wieviele verschiedene Vektoren enthält der von $v := (1, 4, 1)$ aufgespannte Untervektorraum?

c) Liegt $(1, 1, 1)$ in dem von $v := (1, 4, 1)$ und $w := (2, 2, 0)$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{Z}_5^3$?

2.1.4

Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $U \subseteq V$ mit $U := Lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Überprüfe, ob $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und/oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in U liegen.

2.1.5

Sei V ein Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume von V. Beweise oder widerlege:

a) $U \cap W$ ist Untervektorraum von V.

b) $U \cup W$ ist Untervektorraum von V.

c) $U \backslash W$ ist Untervektorraum von V.

2.1.6

Gegeben sei $V = \mathbb{R}^3$. Prüfe, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von V sind:

a) $U_1 := \left\{ \vec{0} \right\}$

b) $U_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\}$

c) $U_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(-3, 0, 6),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

d) $U_4 := \emptyset$

2.2 Basis und Dimension

2.2.1

Gib die Definitionen von Basis, Erzeugendensystem und Dimension an.

2.2.2

Zeige, dass $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ und $C := \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ Basen des $\mathbb{Q}^2$ sind.

2.2.3

Bestimme jeweils die Dimension und eine Basis des erzeugten Teilraums von $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2.4

a) Zeige, dass die folgenden vier Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Ergänze die beiden Vektoren

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch zwei Vektoren aus $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

2.2.5

Betrachte zwei Untervektorräume

$$U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^4.$$

$$U_1 := Lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ U_2 := Lin \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Bestimme eine Basis von $U_1 \cap U_2$
2. Bestimme $(U_1 + U_2)$.

2.2.6

a) Zeige, dass die Vektoren

$$a_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{Z}_5^3$ bilden.

b) Stelle die folgenden Vektoren aus $\mathbb{Z}_5^3$ als Linearkombination aus a_1, a_2 und a_3 dar:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.7

Gegeben seien zwei Untervektorräume U und V des $\mathbb{R}^4$ mit Basen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{(zu U)} \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{(zu } V\text{)}$$

Bestimme Basen für $U \cap V$ und $U + V$.

2.3 Matrizen und lineare Abbildungen des K^n

2.3.1

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

2.3.2

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Löse das Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.3.3

Sei folgende Abbildung gegeben:

$$F_A : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3, \ F_A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 - 3x_6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 - 6x_6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 3x_5 - 3x_6 \end{pmatrix}$$

a) Begründe kurz, dass F linear ist.

b) Bestimme eine Basis von $Kern(F)$

c) Bestimme eine Basis von $Bild(F)$

2.3.4

Sei $K = \mathbb{Z}_5$ und $F : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ eine lineare Abbildung für die

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Kern(F)$$

a) Bestimme explizit die zur Abbildung F gehörige Matrix A, d.h. $F = F_A$.

b) Ist die Abbildung $F = F_A$ so eindeutig bestimmt?

c) Entscheide, ob die Abbildung F surjektiv ist.

2.3.5

Gegeben seien die K-Vektorräume U, V und W und die linearen Abbildungen $F : U \to V$ und $G : V \to W$.
Zeige, dass $G \circ F : U \to W$ ebenfalls eine lineare Abbildung ist.

2.4 Dimensionstheorie und reguläre Matrizen

2.4.1

Überprüfe, ob die Matrix A invertierbar ist:

a) $K = \mathbb{Z}_5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Für $a \in \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

c) $K = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_{13}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.2

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrizen.

a) Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Bestimme weiterhin den Rang von $A, B, A \cdot B$ und $B \cdot A$

b) Gib zu den Matrizen $A, B, A \cdot B$ und $B \cdot A$ eine Basis des Kerns, des Zeilen- und Spaltenraums an.

2.4.3

Überprüfe, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7i \\ 7i & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

invertierbar ist und bestimme gegebenenfalls die Inverse.