# Lernfahrt WS 23/24
# Lineare Algebra

## Inhaltsverzeichnis



Herzlich Willkommen auf der Lernfahrt im WiSe 23/24. Da du hier mitfährst, hast du dein Mathestudium folglich noch nicht aufgegeben und alleine das ist schon einiges wert!

Auf den folgenden Seiten findest du Aufgaben, welche die ersten Themen der Analysis I Vorlesung abdecken. Falls Fragen aufkommen, so empfiehlt es sich erst ein paar zu sammeln, da diese sich ab und an auch selbst erklären. Ansonsten stehen dir viele freundliche Tutoren als Ansprechpartner zur Verfügung.

Es ist nicht erforderlich alle Aufgaben an diesem einen Wochenende zu berechnen. Lieber solltest du dich mit deinen Schwierigkeiten auseinander setzen und alle Themen einmal durchgegangen sein.

**WICHTIG:** Es ist gut möglich, das bereits weitere Themen in der Vorlesung behandelt wurden oder auch in der Klausur vorkommen können. Ebenso geben die Aufgaben keine Garantie, dass die Klausuraufgaben ähnlich werden. Diese Sammlung ist nur zu Übungszwecken.

Und nun viel Spass beim Lösen :)

# 1 Mengenlehre

## 1.1 Aufgabe

Beweisen Sie ohne die Morganschen Gesetze zu nutzen, wobei $A, B \subseteq \Omega$: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

## 1.2 Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen, wobei $A, B \subseteq \Omega$:

(a) $A \backslash \overline{B} \subseteq B$

(b) $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) \subseteq A \cap B$

(c) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

# 2 Abbildungen

## 2.1 Aufgabe

Seien $M, N$ nichtleere Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie: Für alle $Y \subseteq N$ gilt $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Ist $f$ surjektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.
ii) Ist $f$ injektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.
iii) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist $f$ surjektiv.
iv) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist $f$ injektiv.

b) Zeigen Sie: Für alle $X \subseteq M$ gilt $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Ist $f$ surjektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.
ii) Ist $f$ injektiv, so gilt in obiger Aussage Gleichheit.
iii) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist $f$ surjektiv.
iv) Gilt in obiger Aussage Gleichheit, so ist $f$ injektiv.

## 2.2 Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Zuordnungsvorschriften eine Abbildung $M \to N$ definieren. Wenn ja, geben Sie außerdem an, ob die jeweilige Abbildung injektiv oder surjektiv ist. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

a) $M = \{\text{a, b, c, d, e}\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, a $\mapsto$ 4, b $\mapsto$ 1, c $\mapsto$ 7, d $\mapsto$ 1, e $\mapsto$ 2
(a, b, c, d, e sind Buchstaben)

b) $M = \{\text{A, B, C}\}$, $N = \{\text{A}, 2, 4\}$, A $\mapsto$ 4, B $\mapsto$ A, C $\mapsto$ 2 (A, B, C sind Buchstaben)

c) $M = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$, $N = \{(1,1), (2,5), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$, $\frac{x}{y} \mapsto (x, y)$

d) $M = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $N = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $X \mapsto X \setminus \{\varnothing\}$

e) $M = \{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = N$, $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^3, z^4)$

f) $M = \{0,1\}^3 = N$, $(x, y, z) \mapsto (yz, xz, xy)$

### 2.3 Aufgabe

Überprüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ , x \mapsto x + 1$

b) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\ , x \mapsto x^2$

c) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ , x \mapsto \pi \cdot x$

d) $i : \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}\ , x \mapsto x^2$

## 3 Induktion

### 3.1 Aufgabe

Beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: 6 teilt $n^3 - n$.

### 3.2 Aufgabe

Zeigen Sie unter Verwendung der Beweismethode *vollständige Induktion*, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) $2^n \leq (n + 1)!$

(b) $\underbrace{(1 + 3 + 5 + 7 + ...)}_{n} = n^2$

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

## 4 Euklidischer Algorithmus und Modulares Rechnen

### 4.1 Aufgabe

Berechnen Sie folgende Ausdrücke. Verwenden Sie dafür keinen Taschenrechner und führen Sie alle Rechenschritte nachvollziehbar auf.

(a) $5^7 \cdot 7^5 \mod 3$

(b) $3^{10} + 5^{20} + 101^9 \mod 4$

(c) $1459^{10} + 2089^5 \mod 9$

(d) $(8609^4 + 1009^5) \cdot 97^{1234} \mod 16$

### 4.2 Aufgabe

Berechnen Sie folgende Ausdrücke. Verwenden Sie dafür keinen Taschenrechner und führen Sie alle Rechenschritte nachvollziehbar auf.

(a) $11^{11} + 17^{17} \mod 3$

(b) $543^{31} \cdot 131^{43} \mod 4$

(c) $21^{11} \cdot 22^{12} \cdot 23^{13} \cdot 24^{14} \mod 5$

(d) $(22^{21} + 21^{22}) \cdot 23^{23} \mod 6$

### 4.3 Aufgabe

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a,b)$ für

(i) $a = 333332$, $b = 222223$;

(ii) $a = 87654321$, $b = 12345678$

(iii) $a = 2494$, $b = 805$.

Bestimmen Sie jeweils ganze Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $ua + bv = \mathrm{ggT}(a,b)$.

### 4.4 Aufgabe

Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(a,b)$ und finden Sie $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = ar + bs$ für:

- $a = 324$, $b = 45$
- $a = 221$, $b = 105$

### 4.5 Aufgabe

Bestimmen Sie für welche Elemente $[n]_{16}$ aus $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, \odot)$ eine natürliche Zahl $s$ mit $([n]_{16})^s = [1]_{16}$ existiert, wobei $([n]_{16})^s := \underbrace{[n]_{16} \odot \cdots \odot [n]_{16}}_{s\text{-mal}}$ für $s \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie für jedes solche Element das kleinste $s \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft.

## 5 Relationen

### 5.1 Aufgabe

Sind die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(a) $R_1 = \{(1,2),(2,1),(2,2)\} \subseteq \{1,2\} \times \{1,2\}$.

(b) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,2),(3,3)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,2),(2,4)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid$ es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und es gibt gewisse $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in R_3$ mit $x = a_1,\ y = b_n$ und $b_i = a_{i+1}$ für alle $i \in \{1,\ldots,n-1\}\}$.

(e) $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\}$.

### 5.2 Aufgabe

Welche der folgenden Relationen ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$? Beschreibe in diesem Fall die Äquivalenzklassen.

1. $n \sim m$ genau dann, wenn $n + m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
2. $n \sim m$ genau dann, wenn $n + m = 3k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

### 5.3 Aufgabe

Betrachte die folgende Relation auf $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1,x_2) \sim (y_1,y_2) \ :\Leftrightarrow\ \exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } (y_1,y_2) = (ax_1, ax_2).$$

Zeige dass dies eine Äquivalenzrelation ist und gib ein Repräsentantensystem an.

### 5.4 Aufgabe

Sind die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$, wobei $f\colon A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen $A$ und $B$ sei.

(b) $R_2 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a + d = b + c\}$

(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy \text{ ist rational}\}$

### 5.5 Aufgabe

Wir betrachten auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen die folgende Relation.

$$R := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b - a \in \mathbb{Z}\}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $R$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. Die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $R$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(b) Die Menge $[0, 1) := \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a < 1\}$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem von $R$, d.h. zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $b \in [0, 1)$ mit $(a, b) \in R$.

(c) Zeigen Sie, dass folgendermaßen eine Verknüpfung auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definiert wird: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\overline{a} \oplus \overline{b} := \overline{a + b}$, wobei $\overline{a}$ die Äquivalenzklasse bzgl. $R$ von $a \in \mathbb{R}$ bezeichne.

(d) $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.

### 5.6 Aufgabe

Betrachte die folgende Relation auf $\mathbb{R}^2$:

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x_1 - y_1 = y_2 - x_2.$$

Prüfe ob dies eine Äquivalenzrelation ist und gebe gegebenenfalls ein Repräsentantensystem an.

## 6 Gruppen, Ringe, Körper; Homomorphismen

### 6.1 Aufgabe

a) Sei $(G, \circ) = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \odot)$ die Menge aller Restklassen modulo 8 zusammen mit der in der Vorlesung definierten Multiplikation.
Erstellen Sie die zugehörige Verknüpfungstafel. Beantworten Sie die folgenden Fragen unter Verwendung der Verknüpfungstafel:

   i) Gilt für alle $[a]_8, [b]_8 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: $[a]_8 \odot [b]_8 = [b]_8 \odot [a]_8$?
   ii) Existiert ein $f \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft: $[a]_8 \odot f = [a]_8$ für alle $[a]_8 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?
   iii) Falls ein Element $f$ wie in (ii) existiert: für welche Elemente $[a]_8 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ existiert ein Element $[b]_8 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ mit $[a]_8 \odot [b]_8 = f$?

b) Für welche $h \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T_h\colon \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ g &\longmapsto h \odot g \end{aligned}$$

bijektiv? Geben Sie für jedes solche $h$ die Umkehrabbildung zu $T_h$ an.

## 6.2 Aufgabe

Sei $G$ eine Menge und $*\colon G\times G \to G$ eine Verknüpfung auf $G$. $(G,*)$ habe die folgenden Eigenschaften:

(G1) $(G,*)$ ist assoziativ.

(LG2) Es existiert ein $f \in G$ mit $f * a = a$ für alle $a \in G$.

(LG3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $b * a = f$.

Zeigen Sie, dass $(G,*)$ eine Gruppe ist.
(Hinweis: Zeigen Sie zuerst für alle $a, b \in G$, dass aus $b * a = f$ auch $a * b = f$ folgt.)

## 6.3 Aufgabe

Sei $M$ eine nichtleere Menge und $*\colon M \times M \to M$ eine Verknüpfung auf $M$, so dass $(M,*)$ assoziativ ist.

(a) Angenommen es existiert bzgl. $*$ ein neutrales Element $e \in M$. Zeigen Sie für alle $a \in M$: Sind $x, y \in M$ mit $x * a = e = a * y$, dann gilt $x = y$.

(b) Zeigen Sie, dass $(M,*)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn für alle $a, b \in M$ stets $x, y \in M$ mit

$$a * x = b \text{ und } y * a = b$$

existieren.

## 6.4 Aufgabe

Sei G eine Gruppe mit einer geraden Anzahl an Elementen. Zeige, dass es in $G$ außer dem neutralen Element $e$ noch ein weiteres selbstinverses Element $a$ gibt, d.h. $a \cdot a = e$.
Was kann man über die Anzahl der selbstinversen Elemente sagen?

## 6.5 Aufgabe

Auf einem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ seien die Operationen $\boxplus$ und $\boxdot$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} a \boxplus b &:= a + b - 1, \\ a \boxdot b &:= a + b - a \cdot b. \end{aligned}$$

Zeigen oder widerlegen Sie: $(\mathbb{R}, \boxplus, \boxdot)$ ist ein Körper.
Falls sie existieren, was sind die neutralen Elemente bzgl. $\boxplus$ und $\boxdot$?

## 6.6 Aufgabe

Seien $(G,*)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$. Zeigen Sie, dass $H$ in $(G,*)$ genau dann eine Untergruppe bildet, wenn $H$ nichtleer ist und für alle $a, b \in H$ auch $a * b^{-1} \in H$ gilt.

## 6.7 Aufgabe

Sei $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ definiert durch $f(x) = 2^x$.

1. Zeige, dass $f$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
2. Bestimme $kern(f)$ und $Bild(f)$

# 7 Permutationen

## 7.1 Aufgabe

Schreiben Sie die folgenden Permutationen in eine Darstellung aus disjunkten Zyklen und bestimme die Ordnung sowie die Signatur.

(i) $\sigma_1 \in S_8, \sigma_1 = (175)(256)(3421)(83)$

(ii) $\sigma_2 \in S_8, \sigma_2 = (2567)^{29}(143)^{23}(28)^{33}$

(iii) $\sigma_3 \in S_7, \sigma_3 = (15)^{101}(263)^{12}(47)^{51}$

(iv) $\sigma_4 \in S_5, \sigma_4 = [(12)(341)(2531)]^{17}$

# 8 Komplexe Zahlen

## 8.1 Aufgabe

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Falls aus der Vorlesung bekannt: Bringen Sie danach die Zahlen in die Darstellung $re^{i\phi}$.

i) $(5 + 2i)(4 - 3i)$

ii) $i^{-1}$

iii) $(1 + 4i)^{-1}$

iv) $\dfrac{1 + 5i}{5 - i}$

v) $(1 + i)^{16}$

## 8.2 Aufgabe

a) Zeigen Sie: Wenn $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines Polynoms $p$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ ist, so ist die zu $\alpha$ konjugierte komplexe Zahl $\overline{\alpha}$ ebenfalls Nullstelle von $p$.

b) Schreiben Sie die folgenden über $\mathbb{C}$ definierten Polynome als Produkt von Polynomen der Form $X - (a + bi)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

   i) $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$
   
   ii) $X^2 + 3iX + 10$

## 8.3 Aufgabe

Berechne die Lösung des folgenden komplexen Linearen Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 1-i & 2 & -3 \\ 2-2i & -2-2i & 1-i & 3 \end{array}\right)$$

# 9 Lineare Gleichungssysteme

## 9.1 Aufgabe

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & -2 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & & & = & -4 \\ -4x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

über dem Körper $K$, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{11}, \mathbb{F}_{13}\}$.

### 9.2 Aufgabe

Für welche $a \in K$ ist das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar über dem Körper $K$? Bestimme alle Lösungen des Systems für $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{11}, \mathbb{F}_{13}\}$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

## 10 Vektorräume

### 10.1 Aufgabe

Sind folgende Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$? Begründe deine Antwort. Skizziere zuerst die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. Gib für die Teilräume jeweils eine Basis an.

1. $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = (4x_2, x_1 - x_2, 0)\}$
2. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2\}$
3. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
4. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (x_1, 1)\}$

### 10.2 Aufgabe

1. Zeige, dass $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ und $C := \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ Basen des $\mathbb{Q}^2$ sind.
2. Bestimme die Koordinaten des Vektors $v = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $C$.

### 10.3 Aufgabe

Bestimme jeweils die Dimension und eine Basis des erzeugten Teilraums von $\mathbb{R}^3$:

1. $\{(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)\}$
2. $\{(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, -5)\}$
3. $\{(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)\}$
4. $\{(-1, -1, -1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$

### 10.4 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume von Abb($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) bilden:

(a) $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-a) = f(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}\}$

(b) $U_1 := \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-a) = -f(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}\}$

### 10.5 Aufgabe

Sei $K$ der Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Dabei schreiben wir statt $\oplus$ und $\odot$ nur noch $+$ und $\cdot$, sowie für $a \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a < 5$ statt $[a]_5$ nur noch $a$.
Sei $V$ der $K$–Vektorraum $K[X]_4 = \{f \in K[X] \mid$ Grad von $f \leq 4\}$. Zeigen Sie jeweils, dass $V$ die lineare Hülle der angegebenen Elemente ist.

(a) $X + 1$, $X^4$, $X^3 + 4X^2$, $X^2 + 4$, $X + 4$

(b) $2X^3 + X^2$, $X^2 + X$, $X^3 + 2X^2$, $X^4 + X^2$, $X^2 + 4$

### 10.6 Aufgabe

Sei $K$ ein Körper.

(a) Sei $V$ ein $K$−Vektorraum. Zeigen Sie für den Fall, dass $1 + 1 \neq 0$ in $K$ gilt: Sind $x, y, z \in V$ linear unabhängig, so auch $x + y, x + z, y + z$.

(b) Sei $x = (x_1, x_2) \in K^2$ nicht der Nullvektor, sowie $y = (y_1, y_2) \in K^2$ ein weiterer Vektor. Zeigen Sie, dass es genau dann ein $\lambda \in K$ mit $y = \lambda x$ gibt, wenn $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ gilt.

### 10.7 Aufgabe

Im folgenden sind für verschiedene Körper $K$ und natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ Untervektorräume von $K^n$ angegeben. Bestimmen Sie jeweils eine Basis dieser Untervektorräume und ergänzen Sie diese zu einer Basis des ganzen Vektorraumes.

(a) $\operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ für $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (und $n = 3$)

(b) $\operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right) \cap \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\right)$ für $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (und $n = 3$)

### 10.8 Aufgabe

Bestimme eine orthonormale Basis für die Familie $(v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

### 10.9 Aufgabe

Betrachte folgende Teilmenge, des $\mathbb{R}^5$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

a) Zeige, dass die Vektoren einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$ aufspannen.

b) Zeige, dass die Vektoren eine Basis des Untervektorraums sind.

c) Bestimme eine Orthonormalbases des Untervektorraums.

d) Ergänze die in c) gefundende Orthonormalbasis zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^5$.

## 11 Lineare Abbildungen

Beantworte kurz die folgenden Fragen:

- Wie berechnet man den Rang einer Matrix?
- Welche Daten braucht man, um die Matrix einer Abbildung aufzustellen?
- Kann man injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen an ihren Darstellungsmatrizen erkennen? Wenn ja, wie?
- Wie hängt die Verknüpfung von Abbildungen mit der Matrizenmultiplikation zusammen?

### 11.1 Aufgabe

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründe deine Antwort!

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_1(x, y, z) = (x + y + z, x - z, 0)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y, z) = (x + y, y + z - 1, x - z)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_3(x, y) \ = (x^2 + y, x)$
4. $f_4 : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2, \quad f_4(x, y) \ = (x^2 + y, x)$

### 11.2

Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ habe eine Darstellungsmatrix der Gestalt

$$M := \begin{pmatrix} 1 & a^3 \\ a & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Welche Werte kann die Zahl $dim(kern(f))$ annehmen?

## 12 Zusätzliche Aufgaben

Im Folgenden sind einige weitere Aufgaben aufgelistet. Diese sollten erst dann bearbeitet werden wenn die absoluten Grundlagen, also die oberen Aufgaben, erfolgreich bearbeitet wurden!

### 12.1 Aufgabe

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ definiert man auf $G$ eine weitere Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ durch

$$a \circ b := a \cdot x \cdot b.$$

Zeige, dass dann auch $(G, \circ)$ eine Gruppe bildet. Gib außerdem das neutrale Element und zu einem Element $a \in G$ das Inverse an.

### 12.2 Aufgabe

Sei $(G, \cdot)$ eine Menge mit einer assoziativen Inneren Verknüpfung. (Dies nennt man auch eine Halbgruppe)

1. Es gebe ein Element $e \in G$ mit $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$. Weiter gebe es zu jedem Element $a \in G$ ein Element $a' \in G$ mit $a' \cdot a = e$.
   Zeige, dass $(G, \cdot)$ damit eine Gruppe ist.
2. In $G$ seien die Gleichungen $a \cdot x = b$ und $y \cdot c = d$ für alle $a, b, c, d \in G$ eindeutig lösbar.
   Zeige, dass $(G, \cdot)$ damit eine Gruppe ist.

### 12.3 Aufgabe

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a \in G$. Zeige, dass die Abbildung $f : G \to G$ mit $f(b) = a \circ\ b \circ\ a^{-1}$ einen Isomorphismus von Gruppen darstellt.

### 12.4 Aufgabe

Prüfe ob die nachfolgenden Gruppen von Polynomen den $\mathbb{R}$-Vektorrraum $\mathbb{R}[X]_5$ bestehend aus allen Polynomen mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens 5, erzeugen. Sind sie überdies Linear Unabhängig?

- $1, X^3, X^4, X^2, x^5 - 1$
- $X + 1, X^2 + X^3, X^3 + 3, X^4 + 2, X^2(X^3 + X^2), X^2 + 1$
- $X^5 + X^4 + 1, X^5 + X^2 + X^3, X, X^5 + X^4 + X$

### 12.5 Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems über dem Körper $K(X)$ mit $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} X+2 & X^2+X+1 & 0 & X^4+2X^3 \\ X^2+2 & X^3+2X^2 & X & X^5+2X^3+X^2 \\ X^3 & X^4+X^2 & X^4+X^3 & X^6+X^5+X^4 \end{array}\right)$$

### 12.6 Aufgabe

Die Menge $\mathbb{C}^n$ kann sowohl als Vektorraum über $\mathbb{C}$ als auch über $\mathbb{R}$ aufgefasst werden. Zeige:

1. Eine über $\mathbb{C}$ linear unabhängige Menge in $\mathbb{C}^n$ ist auch über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.
2. Die Elemente $(1-i, i), (2, -1+i) \in \mathbb{C}^2$ sind linear abhängig über $\mathbb{C}$, aber linear unabhängig über $\mathbb{R}$.
3. Finde eine Basis von $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{R}$.

### 12.7 Aufgabe

Es sei $K$ ein Körper, $K[X]$ der Polynomring über $K$ in der Unbekannten $X$.

1. Zeige: $K[X]$ ist ein $K$-Vektorraum. Zeige dann weiter, dass $K[X]_m$, die Menge der Polynome vom Grad höchstens $m$, ein Untervektorraum von diesem ist.
2. Es sei $K[X]_4$ wie oben definiert. Bestimme zu *span* $\left(\{X^2 + X + 5, 1, X^4 + X - 2\}\right)$ eine Basis und ergänze diese zu einer Basis von $K[X]_4$.
3. Es sei $K[X]_m$ wie oben definiert. Weiter sei $n \leq m$ und $K[X]_n$ entsprechend. Bestimme zu $K[X]_n$ eine Basis und ergänze diese zu einer Basis von $K[X]_m$.