Aufgabe P1: Kombinatorik

Die Klasse 2a (1 Klassenlehrerin, 13 Mädchen, 11 Jungen) einer Dortmunder Grundschule macht einen Klassenausflug ins Theater.

a) Anzahl an verschiedenen Sitzreihenfolgen

Die Klassenlehrerin reserviert für die Vorstellung eine ganze Sitzreihe mit 25 Plätzen.

Wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen gibt es, wenn sowohl alle Mädchen als auch alle Jungen nebeneinander sitzen sollen und die Lehrerin auf jeden Fall am Rand sitzen soll? Erläutern Sie, wie man alle Möglichkeiten finden kann.

(Hinweis: Als Lösung für die Anzahl der Möglichkeiten reicht der passende Termausdruck, es muss hier keine ausgerechnete Anzahl stehen.)

(4 Punkte)

b) Kombinatorisches Problemlösen in der Schule

Im Vorfeld des Theaterbesuchs thematisiert die Lehrerin in ihrem Mathematikunterricht folgende kombinatorische Situation:
Die Schüler Mike, Leon, Sören und Timo haben vier benachbarte Sitze ergattert. Sie überlegen sich, wer neben wem sitzen könnte.

Sie stellt den Kindern dazu die Aufgabe: Wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen sind nur innerhalb dieser vier Schüler möglich?

b)1 Beschreiben Sie zwei unterschiedliche Strategien, mit denen die Kinder der zweiten Klasse die obige Aufgabe bearbeiten könnten.

(6 Punkte)

b)2 Erklären Sie mit Bezug zur Aufgabenstellung und Ihren Strategien in wenigen Sätzen, was unter der prozessbezogenen Kompetenz des Problemlösens zu verstehen ist.

(3 Punkte)

Aufgabe P2: Mit Zahlen rechnen / Zahlentheorie

a) Halbschriftliche Rechenwege

Sie haben fünf verschiedene halbschriftliche Rechenstrategien zur Subtraktion kennengelernt: *Schrittweise, Stellenweise, Vereinfachen, Hilfsaufgabe* sowie *Ergänzen.*

Jede der beiden nachfolgenden Aufgaben soll auf zwei verschiedene Weisen gerechnet werden, so dass Sie also insgesamt vier verschiedene halbschriftliche Rechenstrategien anwenden müssen.

Geben Sie bei $a)_1$ und $a)_2$ an, welche beiden Strategien jeweils zum Einsatz kommen und beschreiben Sie für jede verwendete Strategie kurz, wie Sie beim Rechnen vorgehen.

Beachten Sie, dass die erste Aufgabe im Stellenwertsystem zur Basis 10 (wie gewohnt!) und die zweite Aufgabe im Stellenwertsystem zur Basis 8 (*also ohne vorheriges Umrechnen ins 10er-System*) zu berechnen ist.

$a)_1$ $6382 - 2777$ (3 Punkte)
$a)_2$ $(7422)_8 - (776)_8$ (3 Punkte)

b) Zahlenrätsel

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen a, die folgende Bedingungen zugleich erfüllen:

- a soll eine ungerade Zahl sein.
- a soll durch 9 und durch 35 teilbar sein.
- Das Doppelte von a soll genau 24 Teiler haben.

Finden Sie alle Zahlen mit diesen Eigenschaften und erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen. Begründen Sie auch, warum es keine weiteren Zahlen geben kann.

(7 Punkte)

Aufgabe P3: Stellenwertsysteme

a) Schriftliche Rechenverfahren

$a)_1$ Berechnen Sie die Aufgabe 6906 − 809 sowohl mit dem schriftlichen Rechenverfahren des *Entbündelns* als auch mit dem des *Erweiterns.* Stellen Sie die schriftliche Notation übersichtlich dar und beschreiben Sie kurz das Verfahren am Beispiel Ihrer Rechnungen.

(3 Punkte)

$a)_2$ Erläutern Sie zwei zentrale Unterschiede zwischen den beiden Verfahren. Nehmen Sie dabei u.a. Bezug auf die Überträge und die zugrundeliegenden Rechengesetze.

(3 Punkte)

b) Übersetzungen von einer Basis zur anderen

In dieser Aufgabe sollen Sie eine gegebene Zahl in verschiedene Stellenwertsysteme übersetzen.

b)1 Übersetzen Sie die Zahl 439 aus dem Dezimalsystem in das Stellenwertsystem zur Basis 4.

10er System	4er System
439	

Erläutern Sie, wie beim Übersetzen vorzugehen ist und stellen Sie das Zahlwort zur Basis 4 in einer entsprechenden Stellenwerttafel dar.

(2 Punkte)

b)2 Übersetzen Sie die Zahl $(10101101)_2$ im Stellenwertsystem zur Basis 2 nun direkt in das Stellenwertsystem zur Basis 8, ohne zuvor den Umweg über das Dezimalsystem zu machen.

2er System	8er System
10101101	

Erläutern Sie, wie Sie die Beziehungen zwischen den beiden Stellenwertsystemen zum Übersetzen nutzen können und stellen Sie dies mit Hilfe geeigneter Stellenwerttafeln dar.

(5 Punkte)

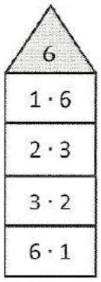
Aufgabe W1: Kombinatorik (Wahlpflicht)

Delia, Sophie, Hannah, Mira, Lene und Andrea stehen sechs benachbarte Sitze zur Verfügung. Die sechs Schülerinnen möchten gerne alle nebeneinander sitzen. Zudem möchte Andrea auf jeden Fall neben Delia sitzen und Mira auf jeden Fall neben Hannah sitzen.

Wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen <u>innerhalb dieser sechs Schülerinnen</u> sind möglich?

Stellen Sie Ihren Lösungsweg nachvollziehbar dar. (11 Punkte)

Aufgabe W2: Mit Zahlen rechnen / Zahlentheorie (Wahlpflicht)



Rechts sehen Sie das Malhaus mit der Dachzahl 6.
Es hat insgesamt 4 Stockwerke.

a) Wie viele Stockwerke hat das Malhaus mit der Dachzahl 7350?
Stellen Sie Ihren Lösungsweg nachvollziehbar dar.

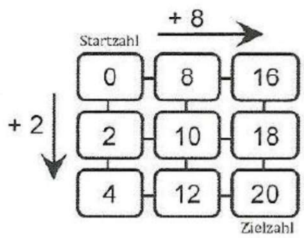
(3 Punkte)

b) Bestimmen Sie den ggT und das kgV des Zahlenpaares (7350, 252) mithilfe des euklidischen Algorithmus sowie den Zusammenhängen zwischen ggT und kgV.

(4 Punkte)

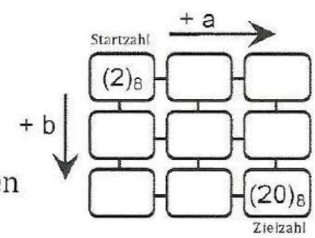
c) Wie viele Stockwerke hat das Malhaus mit der folgenden Dachzahl:
$2 \cdot$ kgV (7350, 252)
Erläutern Sie Ihren Lösungsweg. (4 Punkte)

Aufgabe W3: Stellenwertsysteme (Wahlpflicht)



Im Rahmen der Veranstaltung haben Sie das Aufgabenformat Zahlengitter kennengelernt. Rechts sehen Sie ein Beispiel für ein 3x3-Zahlengitter im Stellenwertsystem zur Basis 10 mit der Startzahl 0 und der Zielzahl 20.

Im Folgenden soll es jedoch um ein 3x3-Zahlengitter im Stellenwertsystem zur Basis 8 gehen.



Finden Sie alle möglichen Additionszahlen mit der Startzahl $(2)_8$ und der Zielzahl $(20)_8$. Die 0 ist als Additionszahl zugelassen.

Erläutern Sie, warum Sie alle möglichen Additionszahlen gefunden haben.

(11 Punkte)

Aufgabe 1: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen

Aufgabe 1.1: Halbschriftliche Subtraktion (3 Punkte)
Rechnen Sie die Aufgabe 83-69 mit den Strategien *Schrittweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen.* Erläutern Sie kurz das Besondere an jeder Strategie.
Aufgabe 1.2: Schriftliche Subtraktion (3 Punkte)
a) Lösen Sie die Aufgabe 3584 – 1289 mit dem schriftlichen Verfahren des Entbündelns („Borgeverfahren").

b) Begründen Sie: Wie und warum funktioniert das Verfahren, wenn die Ziffer im Minuenden kleiner ist als die des Subtrahenden?

Aufgabe 1.3: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen (1,5 Punkte)

a) Nennen Sie jeweils drei wesentliche Merkmale des halbschriftlichen/mündlichen bzw. schriftlichen Rechnens, so dass der Unterschied zwischen dem halbschriftlichen und schriftlichen Rechnen deutlich wird.

Halbschriftliches bzw. mündliches Rechnen	Schriftliches Rechnen

Aufgabe 2: Stellenwertsysteme

Aufgabe 2.1: Zahlen umwandeln (1,5 Punkte)

Wandeln Sie die Zahl $1812_{(10)}$ mit einer beliebigen Strategie ins 6er-System um.

Aufgabe 2.2: Schriftliche Multiplikation im 6er-System (2,5 Punkte)

Rechnen Sie im 6er-System die Aufgabe $513_{(6)} \cdot 212_{(6)}$ schriftlich, ohne ins Zehnersystem umzuwandeln.

Aufgabe 2.3: Teilbarkeit im 6er-System (3 Punkte)

a) Formulieren Sie je die Teilbarkeitsregel für die Division durch 2, 3 und 5 im Sechsersystem.

b) Begründen Sie für eine der drei Regeln, warum sie im Sechsersystem gilt.

Aufgabe 4: Teiler und Vielfache

Aufgabe 4.1: Sieb des Eratosthenes (2 Punkte)

Sie nutzen das Sieb des Eratosthenes zur Primzahlbestimmung:
Wie groß darf dann ein Zahlenfeld maximal sein, damit nach dem Streichen aller echten Vielfachen der Zahlen bis einschließlich 11 alle nicht gestrichenen Zahlen im Feld auch wirklich Primzahlen sind? Begründen Sie!

Aufgabe 4.2: ggt und kgV (2 Punkte)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV der Zahlen 720 und 300 mit Hilfe der Primfaktorzerlegung dieser Zahlen. Stellen Sie Ihr Vorgehen nachvollziehbar dar.

Aufgabe 4.3: Malhäuser (4 Punkte)

Geben Sie alle möglichen Dachzahlen unter 200 an, sodass für ein Malhaus gilt:
Die Dachzahl ist durch 6, aber nicht durch 4 teilbar und das Malhaus hat genau 12 Stockwerke. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5: Kombinatorik

Aufgabe 5.1: Erinnerungsfoto (4 Punkte)

Geben Sie für die folgende Aufgaben 5.1a) - c) jeweils den Lösungsterm an, erläutern Sie ihn und rechen Sie das Ergebnis aus.

Sina, Marie, Christian, Leon und Tim möchten ein Erinnerungsfoto machen.

a) Hierzu stellen sie sich nebeneinander auf. Wie viele unterschiedliche Anordnungen gibt es hierfür? Begründen Sie Ihre Lösung!

b) Die fünf Kinder machen ein weiteres Foto. Hierbei möchte Leon unbedingt am Rand stehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun?

c) Wie viele Anordnungen gibt es, wenn es nur interessiert, wo ein Junge bzw. Mädchen sitzt (nicht aber, wo welcher Junge/welches Mädchen sitzt)?

Aufgabe 5.2: Binomialkoeffizient (4,5 Punkte)

Der Ausdruck $\binom{8}{3}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten aus einer 8-elementigen Gesamtmenge eine Teilmenge mit 3 Elementen auszuwählen.

Beispiel: Aus der Gesamtmenge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wird die Teilmenge $\{1, 3, 4\}$ ausgewählt.

Übersetzen Sie diese Darstellung der oben genannten Teilmenge in die folgenden Darstellungen.
Formulieren Sie außerdem jeweils eine passende kombinatorische Fragestellung.

a) 0-1 Folge

b) Zahlzerlegung ohne Null

Aufgabe P2: Teilbarkeiten/Stellenwertsysteme (12 Punkte)

<u>a) Zahlenrätsel</u>

Gesucht sind natürliche Zahlen a, die folgende Bedingungen zugleich erfüllen

1. a soll durch 143 teilbar sein
2. ggT (a, 126) = 1
3. Das Hasse- Diagramm von a sieht wie folgt aus (Zeichnung)

a)1 Formulieren Sie möglichst konkret für jede Bedingung, welche Konsequenzen sich für a ergeben. (3 P.)

a)2 Wie kann die PFZ von a unter Berücksichtigung aller Bedingungen aussehen? Erläutern Sie Ihr Vorgehen. Finden Sie schließlich die drei kleinsten Zahlen, die alle drei Bedingungen zugleich erfüllen. (3 P.)

<u>b) Teilbarkeitsregeln im 6-er System</u>

Betrachten Sie folgende Zahlen im 6-er-System:

$(2132)_6$ $(2133)_6$ $(2134)_6$ $(2135)_6$

b)1 Formulieren Sie jeweils die passende Teilbarkeitsregel für die Division durch 3, 4 und 5 im 6-er-System. Geben Sie anschließend für jede Regel nur diejenigen der oben aufgeführten Zahlen an, welche die Teilbarkeit erfüllen. (4,5 P.)

b)2 Begründen Sie für eine der drei obigen Regeln, warum diese im 6-er-System gilt. (1,5 P.)

Aufgabe P3: Kombinatorik (12 Punkte)

<u>a) Probetüten mit Gummibärchen</u>

Für eine Werbeaktion sollen Probetüten mit Gummibärchen gefüllt werde. Zur Verfügung stehen insgesamt 5 Sorten (rot, gelb, blau, orange, farblos). Es sollen immer 8 GB in einer Tüte sein.

Erläutern Sie jeweils Ihr Vorgehen.

a)1 Wie viele verschiedene Probetüten können auf diese Weise hergestellt werden? (3 P.)

a)2 Wie viele verschiedene Probetüten können auf diese Weise hergestellt werden, wenn noch zusätzlich die zwei Bedingungen zugleich gelten sollen:

> Es soll mindestens ein rotes GB dabei sein
>
> Gelbe und Farblose GB sollen nie gemeinsam vorkommen (6 P.)

<u>b) Kombinatorik in der Grundschule</u>

In der Grundschule wird den Kindern folgende Gummibärchen-Aufgabe gestellt:

> Es gibt beliebig viele GB in den Farben rot, gelb, orange und farblos. Es sollen Tüten mit
>
> jeweils 3 GB gefüllt werden. Finde alle Möglichkeiten, die Tüten verschieden zu füllen.

Die Aufgabenstellung fördert die prozessbezogene Kompetenz des Problemlösens. Erläutern Sie mit Bezug zur Aufgabenstellung, was unter der prozessbezogenen Kompetenz des Problemlösens zu verstehen ist. Gehen Sie dabei auf die unterschiedlichen Phasen des Problemlösens ein. (3 P.)

Aufgabe W2: Schriftliche Subtraktion (Wahlpflicht)

Im Rahmen der Veranstaltung haben Sie verschiedenen Rechenverfahren zur schriftlichen Subtraktion kennengelernt.

a) Berechnen Sie die Differenz der Aufgabe 8123-4567 schriftlich mithilfe der beiden Rechenverfahren Auffüllen und Entbündeln. Stellen Sie beide Rechenverfahren übersichtlich dar und beschreiben Sie diese kurz. (2 P.)

b) Erläutern Sie zwei zentrale Unterschiede zwischen den beiden Rechenverfahren. Nehmen Sie dabei z.B. Bezug auf die Überträge und die zugrundeliegenden Rechengesetze. (2 P.)

Rechnen Sie die Aufgabe **34 + 19** mit den Strategien *Stellenweise, Schrittweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen*. Erläutern sie jeweils kurz das Besondere an jeder Strategie.

Aufgabe 2.1: Zahlen umwandeln (3 Punkte)
Wandeln Sie die Zahl 643 mit einer beliebigen Strategie ins 8er-System um.
Aufgabe 2.2: Addition und Subtraktion im 8er-System (2 Punkte)
Rechnen Sie im 8er-System die Aufgaben $\mathbf{375}_{(8)}+\mathbf{204}_{(8)}$ und $\mathbf{4203}_{(8)}$ - $\mathbf{432}_{(8)}$, ohne ins Zehnersystem umzuwandeln.
Aufgabe 2.3: Multiplikation im 8er-System (3 Punkte)
Rechnen Sie im 8er-System die Aufgabe $\mathbf{463}_{(8)} \cdot \mathbf{205}_{(8)}$, ohne ins Zehnersystem umzuwandeln.

Aufgabe 2.4: Teilbarkeit im 8er-System (3 Punkte)
Begründen Sie an der Stellentafel für das Achtersystem, dass die Zahl 734_8 durch 7 teilbar ist. Tipp: Wie ändert sich eine Zahl, wenn ein Plättchen aus einer Spalte in eine andere geschoben wird?

Aufgabe 3.1: Zahlenketten (5 Punkte)

„Setze die Zahlenketten fort. Wie ändert sich jeweils die fünfte Zahl? Begründe.“

3	3	6	9	15
3	4	7	11	
3	5			

a) Lösen Sie die Aufgabe. Geben Sie eine grundschulgemäße (Tipp: mit Plättchen) und eine algebraische Begründung an.

ggf. Rückseite benutzen

Eine Zahl hat die Primfaktorzerlegung $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^9 \cdot 7^3$

a) Wie viele Teiler hat die Zahl insgesamt?

b) Wie viele Teiler sind ungerade?

c) Wie viele Teiler sind Quadratzahlen?

d) Wie viele Teiler sind nicht durch 15 teilbar?

Aufgabe 5.1: Augenzahlen (8 Punkte)

Beantworten Sie die Fragen und erläutern Sie Ihre Rechnungen.
Sie würfeln mit drei Würfen: einem roten, einem blauen und einem grünen Würfel. Wie viele Würfelkombinationen gibt es:

a) insgesamt?

b) wenn die Augenzahlen jeweils verschieden sind?

c) wenn der blaue Würfel die Augenzahl 3 zeigt?

d) wenn keine 1 gewürfelt wird?

e) wenn keine Zahl dreimal vorkommt?

f) wenn genau zwei Würfel die gleiche Augenzahl zeigen?

g) wenn die Summe der Augenzahlen 10 ergibt?

Aufgabe 5.2: Rekursion von Binomialkoeffizienten (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch die Rekursion: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Ein Zahlenschloss mit 4 Einstellringen ist gegeben.
Auf jedem Ring kann man die Zahlen 0, 1, ..., 7 einstellen.

Wie viele Zahlen können entstehen, wenn alle Ziffern verschieden sein sollen? (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)

Wie viele Zahlen auf diesem Zahlenschloss haben die folgenden Eigenschaften?

– in der Zahl ist genau einmal die 1, genau einmal die 2. (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)
– genau eine Zahl ist doppelt in benachbarten Ringen. (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)
– die Zahl besteht aus genau 2 (versch.) Pärchen gleicher Zahlen. (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)

Ein Zahlenschloss mit 4 Einstellringen ist gegeben.
Auf jedem Ring kann man die Zahlen 1, 2, ... 8 einstellen.

Wie viele Zahlen können entstehen, wenn alle Ziffern verschieden sein sollen? (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)

Wie viele Zahlen auf diesem Zahlenschloss haben die folgenden Eigenschaften?

– in der Zahl ist genau einmal die 1, genau einmal die 2. (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)

– genau eine Zahl ist doppelt in benachbarten Ringen. (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)

– die Zahl besteht aus genau 2 (versch.) Pärchen gleicher Zahlen. (Anzahlbestimmung mit Erläuterung!)